Quel niveau d’étude en mathématiques ? Pour quel public d’élèves ou d’étudiants ?

Maggy Schneider, Université de Liège

IUFM de Point-à-Pitre, Mars 2010

Introduction

Question qui concerne l'articulation, voire la transition, entre les mathématiques enseignées au niveau secondaire et celles enseignées dans l'enseignement supérieur

Plan de l'exposé

- ✓ Difficultés d'apprentissage en géométrie analytique 3D
- ✓ Extraits d'une progression didactique susceptible de les travailler
- ✓ Obstacles d'apprentissage en analyse
- ✓ Extraits d'une progression didactique susceptible de les travailler
- ✓ Deux niveaux d'étude en mathématique
- ✓ Pour lancer le débat sur l'articulation

Erreurs relatives à la géométrie analytique 3D

- Pour plusieurs élèves : $y - 2x + 1 = 0$ ($y = 2x - 1$); $x = 0$ sont des équations de droites en géom 3D
- L'équation d'une droite serait, en 3D, de la forme :

  $ax + by + cz + d = 0$!

  et les élèves sont étonnés qu'il faille deux équations cartésiennes pour caractériser une droite
- Le système suivant représente, pour certains, une droite qui ne passe pas par l'origine alors que le triplet (0, 0, 0) le vérifie pour *k* égale à 2 :

$$x = 3k - 6$$
$$y = -k + 2$$
$$z = 2k - 4$$

Erreurs relatives à la géométrie analytique 3D

De telles difficultés d'apprentissage semblent résistantes à la formation : elles peuvent être observées dans le secondaire, à l'université, lors de formations d'étudiants-professeurs

Un premier niveau d'interprétation : les équations sont, pour les élèves ou étudiants, des « étiquettes » qui désignent des objets géométriques (ou des types de graphiques) plutôt que des contraintes sur les coordonnées de points formant l'un ou l'autre lieu géométrique

Des « expériences premières » liées au contrat

A un autre niveau d'interprétation, on peut voir là la trace de connaissances antérieures, « d'expériences premières » importées sans questionnement

A l'instar de Chevallard et al. à propos du « problème du 0 », on peut interpréter ces réactions d'élèves « en relation avec les conditions concrètes de l'activité de l'élève » et, *in fine*, liées au contrat didactique. En l'occurrence, un élève croit devoir gérer convenablement les expressions algébriques en respectant les différences ostensives et en préservant la complexité ostensive : à des objets géométriques distincts se doivent de correspondre différentes écritures algébriques et une même écriture ne peut donner lieu à plusieurs interprétations géométriques

La source de ces difficultés : inefficacité de l'enseignement ou manque d'étude ?

A l'université : la géométrie analytique est subordonnée à l'algèbre linéaire. Dans la théorie standard :

- Les droites et plans sont définis d'emblée comme variétés linéaires ou affines. Les vecteurs sont des éléments d'un espace vectoriel et des vecteurs colinéaires sont définis à partir de la notion de partie liée
- Un théorème permet de traduire les écritures vectorielles en termes de coordonnées : *Tout espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps commutatif K est isomorphe à l'espace* K^n *des coordonnées*

Efficacité de l'algèbre linéaire comme théorie multi-sens

Inefficacité de l'enseignement ou manque d'étude ?

Dans la transposition didactique en vigueur dans le secondaire :

- Le point de départ est toujours vectoriel
- On gomme les points jugés trop difficiles pour les élèves (Organisation mathématique à « trous »)
- On passe du vectoriel au paramétrique (puis au cartésien) sans aucune justification, le déploiement des écritures avec flèches en écritures sur les coordonnées étant perçu comme une « recette »
- On évite les questions des élèves sur la pertinence des modèles vectoriels

Inefficacité de l'enseignement ou manque d'étude ?

- L'enseignement de la géométrie analytique 3D serait donc sujette à caution que l'on se situe sur un plan théorique ou que l'on regarde comment les modèles algébriques d'objets géométriques sont « justifiés »
- Cet enseignement semble conduire à un « rabattement » de l'apprentissage sur des acquisitions procédurales
- Peut-on imaginer un autre niveau d'enseignement qui prendrait comme objet d'étude la modélisation algébrique d'objets géométriques ?

Aperçu d'un autre enseignement qui prend cette modélisation comme objet d'étude

Que représente l'ensemble des points de « l'espace » dont les coordonnées vérifient l'équation y = - 3/2x + 2 ?

- Première interprétation en termes de droites
- Idée de « dénotation » absente chez quelques élèves

Question pour enrichir le milieu : *Le point (4, -3, 10) appartient-il à cet ensemble ?*

- Débat entre élèves : l'absence de 'z' dans l'équation signifie-t-elle que *z* est nul ou que *z* peut être remplacé par n'importe quelle valeur ?
- La forme *y = -3/2x + 3 + 0z* n'est pas spontanée et la dénotation est donc ici inhabituelle

Aperçu d'un autre enseignement qui prend cette modélisation comme objet d'étude

- Germe alors l'idée que les points forment un plan engendré par le mouvement de droites ou constitué de droites parallèles ou composé de points dont la projection appartient à la droite initiale
- Pour plusieurs étudiants, l'équation "y = -3/2x+3" reste pourtant associée à "une droite qui bouge" : "*dans le plan Oxy, z vaut zero et l'équation est y=-3/2x+3+0z. Si je mets la droite à la valeur 1 pour le z, j'obtiens une droite à une hauteur 1 : y = -3/2x+3+1z. Pour z valant 2, j'ai une droite à la hauteur 2 et y = -3/2x+3+2z, et ainsi de suite, pour z valant 3, y = -3/2x+3+3z …*"

Respect, à nouveau, des différences ostensives et de la complexité ostensive

Aperçu d'un autre enseignement qui prend cette modélisation comme objet d'étude

Quelle pourrait être une équation du plan Oxy ?

- Certains élèves ne comprennent pas la question
- Le système *ax + by = 0* et *z = 0* serait *« l'équation du plan Oxy »* car *« Ce sont deux équations liées, la première disant que x et y peuvent prendre n'importe quelles valeurs et la deuxième disant que z vaut zéro. Les coordonnées x et y sont libres car ils peuvent prendre n'importe quelles valeurs dans cette équation et les paramètres a, b et d varieront pour ajuster cette équation, dépendront de x et y »*

Les élèves cherchent à exprimer la liberté des coordonnées aussi bien que leurs contraintes : on touche là à des notions paramathématiques ou protomathématiques qui ne font pas l'objet d'un enseignement mais sont connues par leurs usages

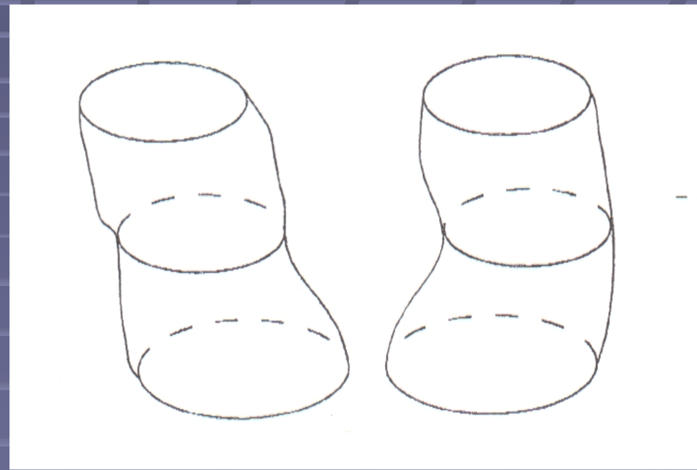
Aperçu d'un autre enseignement qui prend cette modélisation comme objet d'étude

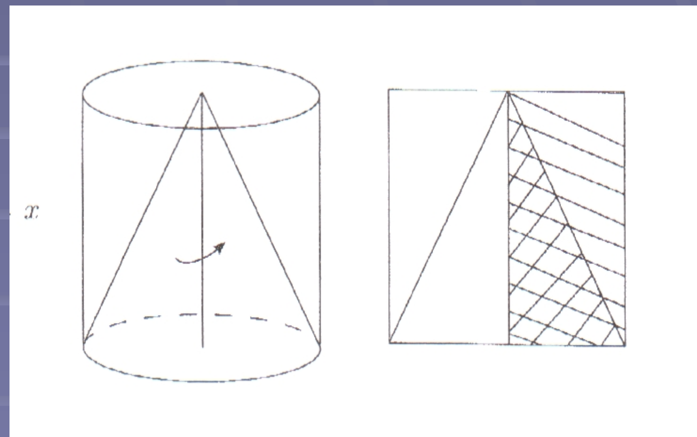
- On peut voir ici apparaître et travaillées des difficultés d'apprentissage négligées lorsqu'on déduit les registres cartésien et paramétrique du registre vectoriel
- En l'absence de travail sur la pertinence de ces modèles algébriques d'objets géométriques, ces difficultés risquent d'apparaître à nouveau durant les séances d'exercices
- Cette pertinence est « justifiée » sur base d'une argumentation hybride (géom. anal. 2D et géom. synth. 3D)

Nécessité d'un travail de modélisation en analyse : des « expériences premières » qui « font obstacle »

Peut-on déduire un rapport entre les volumes de 2 solides de l'invariance du rapport des aires des surfaces qui les « composent » ?

Pas toujours





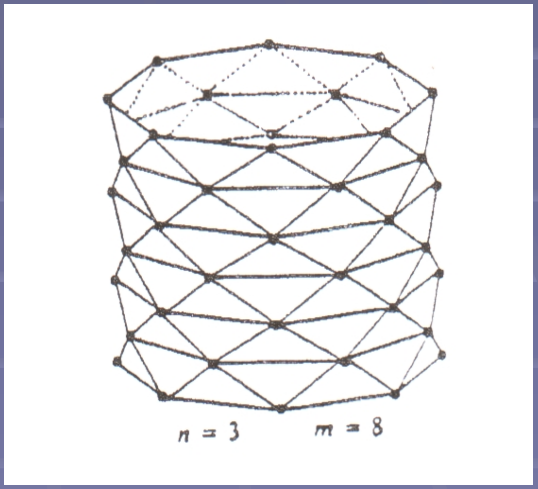
Nécessité d'un travail de modélisation en analyse : des « expériences premières » qui « font obstacle »

- Et pourtant, la tentation est grande de considérer que les mesures de grandeurs se doivent d'exprimer ce que l'on « voit » des grandeurs elles-mêmes. Les mesures sont alors plus des reflets des objets du « monde physique », ce qui fait obstacle à leur conceptualisation mathéma-tique
- Cet obstacle est signe d'une absence de distanciation entre les phénomènes observés et les concepts créés pour les modéliser : il est une manifestation du positivisme empirique

Autres manifestations du positivisme empirique

Douter que la limite d'une suite de sommes d'aires de rectangles donne la valeur exacte d'une aire curviligne car ces rectangles n'épousent pas parfaitement la surface ou se réduisent en segments

Définir l'aire d'une surface courbe comme la limite de la somme des aires des triangles d'une surface polyédrale inscrite, jusqu'au contre-exemple de Schwarz en 1883



Autres manifestations du positivisme empirique

Douter que le calcul d'une limite puisse donner la valeur exacte d'une vitesse instantanée qui échappe jusqu'à un certain point aux observations et aux mesures

Penser, voire définir, la tangente comme 'limite' de sécantes, manière d'exprimer ce que l'on voit, sans avoir défini une quelconque topologie sur l'ensemble des droites

Autres manifestations du positivisme empirique

Conceptions causaliste et chronologique de la probabilité conditionnelle, signes d'une difficulté à se détacher d'exemples précis où existent un caractère d'antériorité-postériorité ou un lien de cause à effet

Refus d'accepter les relatifs comme « nombres » faute de pouvoir « déterrer dans la Nature des exemples pratiques qui les expliquent sur le mode métaphorique »

Améliorer l'enseignement de l'analyse au niveau secondaire

Distinguer deux types de projets mathématiques correspondant à deux périodes de l'histoire des mathématiques :

- « modélisation de grandeurs » (projet articulé à un autre « modélisation fonctionnelle »)
- Construction de l'analyse mathématique comme discipline autonome et déductive

« Modélisation de grandeurs »

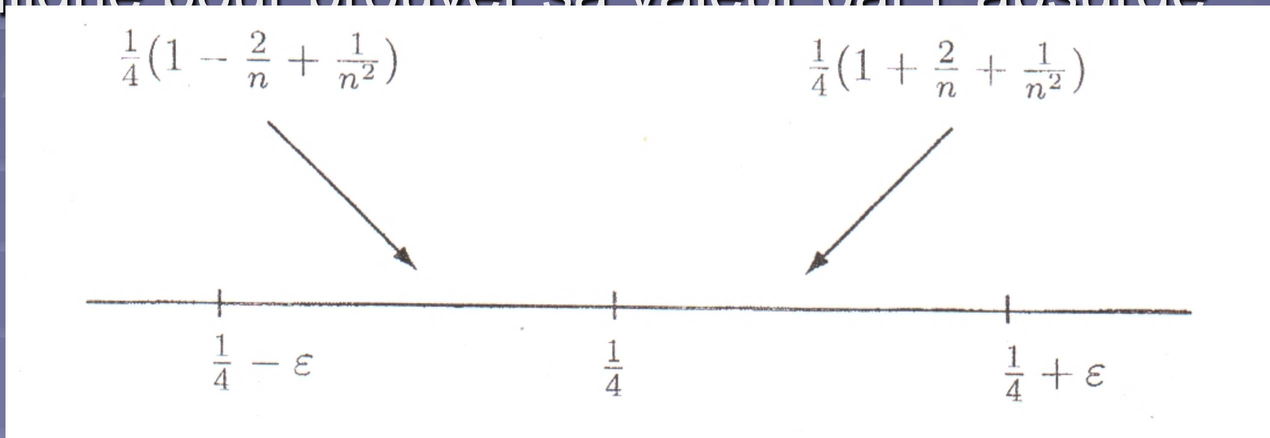
- Détermination d'aires et de volumes curvilignes, de vitesses variables et de tangentes, questions d'optimisation par des techniques « conviviales » : calcul de limites, de dérivées, de primitives
- A ce stade, les grandeurs ne sont pas vraiment définies mais sont des sortes de « préconstruits »
- Le concept de limite apparaît sous une forme embryonnaire : c'est ce qu'on obtient en supprimant des termes dans une expression algébrique, sans jeu de compensations

Premier niveau : le travail de modélisation

- C'est à ce niveau que doivent être gérées les questions qu'une vision empiriste induit sur la pertinence des techniques : *« Un calcul de limite peut-il donner la valeur exacte d'une aire curviligne ou d'une vitesse instantanée ? »*
- D'où la nécessité d'un discours technologique qui ne s'apparente pas à un discours théorique standard dans lequel les aires, vitesses, … sont <u>définies</u> par le biais du concept de limite

Premier niveau : le travail de modélisation

- On justifie que ce calcul donne bien ce que l'on cherche, au prix d'une « validation » non canonique (intuitions géométriques ou cinématiques, validation pragmatique)
- Par exemple, jouer sur un encadrement d'une aire curviligne pour prouver sa valeur par l'absurde



Premier niveau : le travail de modélisation

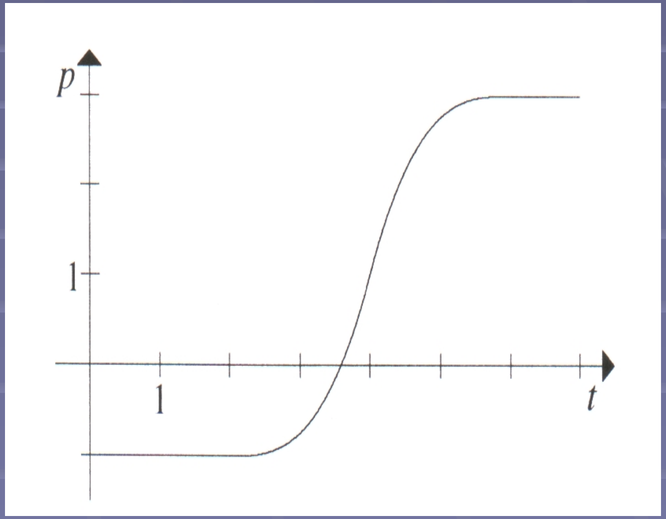
- Ou rendre crédible une nouvelle technique, sujette à caution, en montrant qu'elle permet de retrouver des résultats déjà acquis par d'autres méthodes
- A l'instar de Fermat qui met à l'épreuve sa méthode d'adégalité, où intervient un infinitésimal au statut ambigu, en l'appliquant à un problème d'optimisation et un autre de tangente déjà résolus dans l'Antiquité

Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

Création d'un milieu pour la suite :

- Décrire le mouvement d'un mobile sur une trajectoire rectiligne à partir de sa loi de position
- Eléments mis sur le tapis : Interprétation cinématique du signe du graphique, de sa croissance et de sa concavité

Vitesse moyenne sur un intervalle de temps

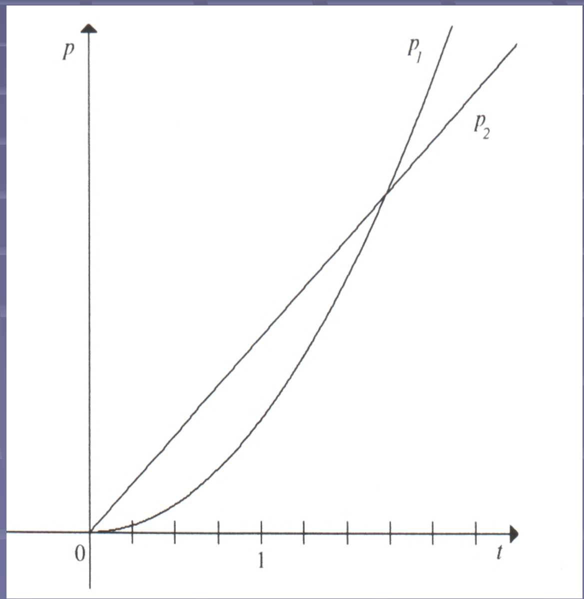


Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

Quand les 2 mobiles ont-ils même vitesse ?

Travail graphique

Travail analytique, d'abord quand le mouvement non uniforme est décrit par une fonction du second degré et puis par une fonction du 3ème degré

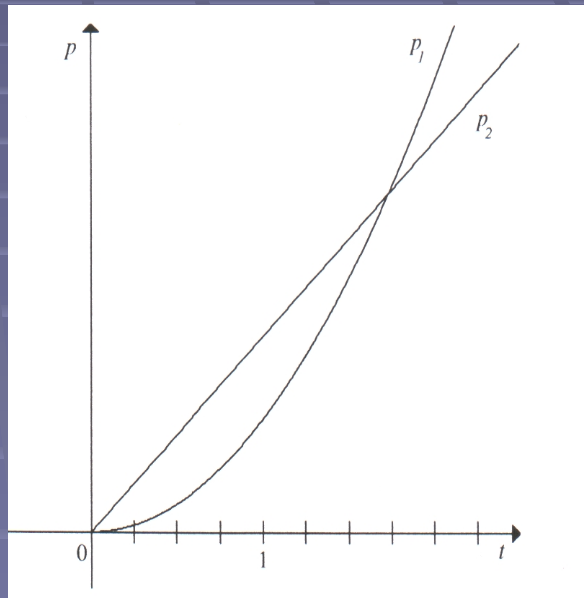


Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

Quand les 2 mobiles ont-ils même vitesse ?

Travail graphique

Travail analytique, d'abord quand le mouvement non uniforme est décrit par une fonction du second degré et puis par une fonction du 3ème degré

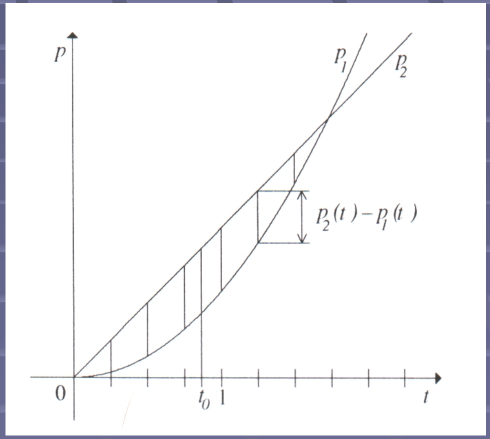


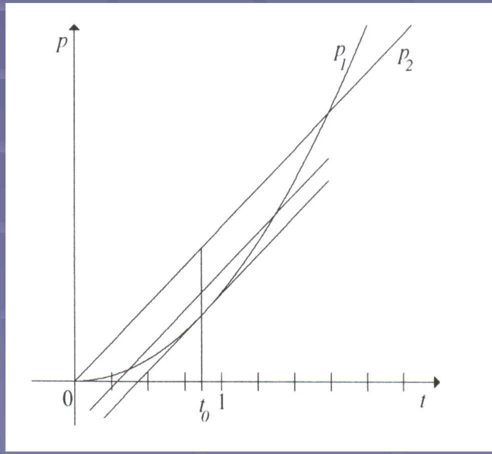
Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

- Stratégie 1

  Déterminer la valeur de *t* pour laquelle l'écart est maximal
- Stratégie 2

  Déterminer l'instant en lequel une droite de même pente que le graphique de p_2 rencontre celui de p_1 en un seul point

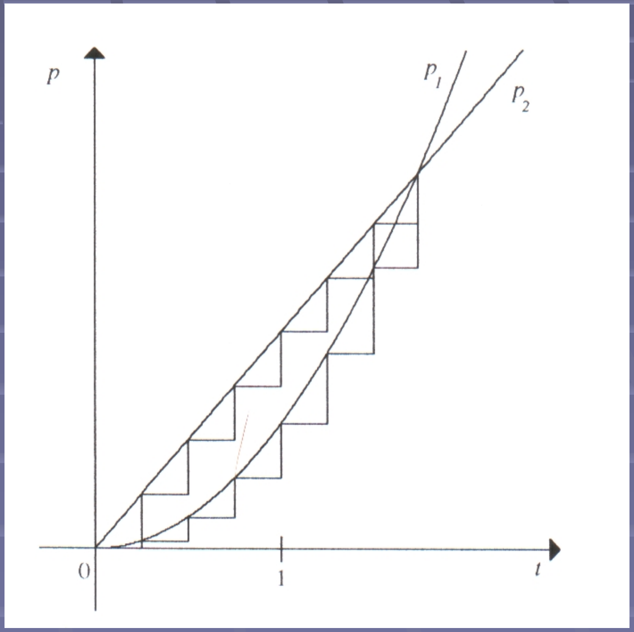




Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

- Stratégie 3

  Déterminer l'intervalle de temps sur lequel les deux mobiles ont même vitesse (ou même déplacement) et ce, pour des intervalles de temps de plus en plus petits



Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

- La stratégie 3 est sujette à caution mais sa validité peut être contrôlée avec les autres (validation pragmatique « à la Fermat »)
- C'est la seule qui subsiste quand une fonction du 3ème degré est mobilisée (caractère fondamental des problèmes)

Si l'on appelle Δp_1 la hauteur de la contremarche de p_1 et Δp_2 la hauteur de la contremarche de p_2 entre les instants t et $t+\Delta t$. On a

$$v_{m_1} = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t}$$

et

$$v_{m_2} = \frac{\Delta p_2}{\Delta t} = \frac{\sqrt{3} \cdot \Delta t}{\Delta t}.$$

En écrivant que les vitesses moyennes sont égales, on trouve

$$2t + \Delta t = \sqrt{3}.$$

En posant $\Delta t = 0$, on retrouve le même résultat que précédemment.

Premier niveau : le travail de modélisation

A ce niveau, la praxéologie « grandeurs » s'articule avec la praxéologie « modélisation fonctionnelle » dont la tâche fondamentale consiste à catégoriser des phénomènes extra ou intra-mathématiques par des modèles fonctionnels paramétrés qui donnent prise au calcul des dérivées et des primitives

Praxéologie : Tâches, Techniques, Théories (discours technologique) ou

Quoi ?, Comment ?, Pourquoi?

Deuxième niveau d'étude : couler le modèle dans un moule euclidien

- ✓ Définir mathématiquement les objets initiaux (vitesses, aires, …) par les techniques qui permettaient de les déterminer au stade précédent, ce qui suppose que soient réglées les questions relatives à l'efficacité et à l'intelligibilité des techniques
- ✓ Agencer les pièces du modèle en une organisation déductive où le mode de validation est exempt de toute considération liée aux contextes d'origine
- ✓ Construire le concept de limite comme « proof-generated concept » au sens de Lakatos

Deuxième niveau d’étude : couler le modèle dans un moule euclidien

Du calcul infinitésimal à l’analyse :

- Euler, le concept de fonction et le renversement de l’ordre d’exposition de la théorie : les questions d’ordre géométrique ou physique deviennent des applications
- Lagrange et la reformulation de l’analyse en termes de fonctions dérivées et de fonctions primitives
- Cauchy et la volonté d’une refonte déductive basée sur le concept « mère » de limite, respectant la « rigueur des géomètres grecs de l’Antiquité »
- Bolzano et le projet métaphysique d’épurer le discours de toute connotation géométrique ou cinématique et de définir la continuité numérique

Deuxième niveau d'étude : couler le modèle dans un moule euclidien

- ✓ Ce 2ème niveau se distingue du 1er par des tâches et techniques d'un autre ordre : conjecturer un ordre d'agencement de théorèmes, démontrer l'un d'eux au moyen des règles d'inférence du calcul propositionnel, établir un lot d'axiomes, réfuter une conjecture fausse par la technique de la recherche du lemme coupable, …
- ✓ Pose des questions épistémologiques : nature des concepts scientifiques, falsifiabilité des théories, problème méthodologique de la simplicité des modèles, refus du mélange des genres, …

Deux niveaux praxéologiques

Processus pour décrire deux facettes de l'activité mathématique et produits de ces processus en termes d'organisations mathématiques

- ✓ Praxéologies « modélisation » : on cherche à modéliser des objets non définis mathématiquement mais dont on a une certaine connaissance (ce sont des 'préconstruits' au sens de Chevallard et ils fonctionnent comme des 'objets mentaux' au sens de Freudenthal)
- ✓ Praxéologies « déduction » : on construit une organisation déductive des propriètés des modèles émergeant au terme du premier niveau

Deux niveaux praxéologiques

L'absence d'identification du premier niveau praxéologique est suggérée par les investigations de Rouy auprès de plusieurs publics: élèves-professeurs, professeurs d'université, enseignants du secondaire

Qu'en est-il du 2ème niveau pour les élèves ou étudiants ?

Et de sa visibilité ?

Les praxéologies « déduction » sont souvent présentées sous une forme achevée, le travail heuristique étant gommé, même par « îlots ». Or, il y a là sans doute des opportunités pour construire des situations didactiques dont l'enjeu majeur est de changer le rapport personnel des élèves aux définitions qui ne sont plus des descriptions des objets mais des référents qui donnent prise au raisonnement déductif, ce qui suppose un dépassement de l'obstacle empiriste

Pour lancer le débat : d'une institution à l'autre

« Je crois que tout simplement dans le secondaire j'ai vu la limite et la dérivée comme des techniques. Je savais très bien dériver, je ne me trompais pas mais la signification profonde de la dérivée, je ne l'avais pas perçue. Je pense que la maturité de l'élève est telle que c'est une notion sur laquelle il faut revenir après. Je ne vois pas de problème à dire : on a donné la définition, on a surtout insisté sur la technique de calcul parce que c'est à la portée des élèves à cet âge-là et puis en premier bac, on revient sur la notion en disant : attention, voilà ce qu'il y a en plus. Même en bio, je reviens dessus en disant : c'est un taux de variation instantané particulier. Et ça, dans le secondaire, on ne l'a pas vu mais il ne fallait peut-être pas le voir. C'est à nous à le faire » (professeur 1er BAC)

Pour lancer le débat : d'une institution à l'autre

- *« Je pense que, dans le secondaire, les élèves n'ont aucun intérêt, aucun désir de maîtriser les dérivées »* (professeur d'université)
- *« Les élèves qui arrivent du secondaire ne réfléchissent pas : ils appliquent des procédures »* (professeur d'université)
- *« On nous dit qu'il faut évaluer selon trois compétences : connaître, appliquer et résoudre des problèmes. Mais, il vaut mieux mettre le maximum de points pour la deuxième rubrique si l'on veut ne pas avoir trop d'échecs »* (professeur du secondaire)
- *« Tout ce qu'on nous demande, c'est de préparer les élèves à bien calculer pour la suite »* (professeur du secondaire)

Erreurs relatives à la géométrie analytique 3D

De telles difficultés d'apprentissage semblent résistantes à la formation : elles peuvent être observées dans le secondaire, à l'université, lors de formations d'étudiants-professeurs

Un premier niveau d'interprétation : les équations sont, pour les élèves ou étudiants, des « étiquettes » qui désignent des objets géométriques (ou des types de graphiques) plutôt que des contraintes sur les coordonnées de points formant l'un ou l'autre lieu géométrique